$a \leq b \Rightarrow ab \geq a$ الضرب

تمرين :

ادرس المتراجحة البوليانية $ax+b \leq c$ في

لا يمكن ردها إلى معادلة من النموذج في التمرين السابق

في $D(210)$ حل المتراجحتين $6x+2 \leq 3$, $7x+5 \leq 105$

الحل :

$ax+b \leq c \Leftrightarrow (ax+b)c = ax+b \Leftrightarrow$

$(ax+b)+(ax+b)c = 0 \Leftrightarrow (a+ac)x+(b+bc) = 0$

من التمرين السابق مجموعة الحلول تعطى بالمتراجحة المزدوجة

$b+bc \leq x \leq (a+ac)+(b+bc)+1$ ، $b \leq x \leq a+b+1$

لحل المتراجحة

$D(210)$ في $6x+2 \leq 3$

$D(210) = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

$2+2.3 \leq x \leq 6+6.3+2+2.3+210$

$2+1 \leq x \leq 6+3+2+1+210 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6+3+105$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq (6.70) \vee (35.3)+105$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq (2 \vee 1)+105$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 2+105 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq (2.2) \vee (105.105)$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 2 \vee 105$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 210$

مجموعة الحلول $\{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$

$6x+2 = 6.2+2 = 2+2 = 0 \leq 3$

$6.6+2 = 6+2 = (6.105) \vee (35.2) = 3 \vee 1 = 3 \leq 3$

$6\cdot 10+2 = 2+2 = 0 \leq 3$

$6\cdot 1u + 2 = 2+2 = 0 \leq 3$

$6\cdot 30+2 =$ ~~$2+2=0\leq 3$~~ $= 6+2 = (6\cdot 105)+v(36\cdot 2) = 3v1 = 3 \leq 3$

بالنسبة للمتراجحة $7x+5 \leq 105$

$5+5\cdot 105 \leq x \leq 7+7\cdot 105+5+5\cdot 105+210$

$5+5 \leq x \leq 7+7+5+5+210$

$1 \leq x \leq 1+1+210$

$1 \leq x \leq 210$

أي أن المتراجحة محققة دوماً :

$7x+5 = 7\cdot 1+5 = 1+5 = 5 \leq 105$

$7x+5 = 7\cdot 2+5 = 1+5 = 5 \leq 105$

تمرين :

في جبر بول A لتكن المعادلتين

$$(1)\begin{cases} ax+by=c \\ ux+vy=w \end{cases}$$

حيث a,b,c,u,v,w عناصر ثابتة في A

بافتراض أن $\Delta = av+bu$ برهن أنه إذا كان $\Delta=1$ فإن الجملة (1) تقبل حل وحيد (x,y) ثم أحسبه

الحل :

بضرب المعادلة الأولى بـ v والثانية بـ b نجمع

$$\begin{cases} avx+bvy=cv \\ bux+bvy=wb \end{cases}$$ بالجمع

$avx+bvy+bux+bvy = cv+bw$ نجد بعد تطبيق بعض نظريه

$avx+bux = cv+bw$

$(av+bu)x = c(cv+bw)$

نعوض $\Delta = 1$

$1.x = cv+bw$

$\Rightarrow \boxed{x = cv+bw}$

من أجل إيجاد y نضرب المعادلة الأولى بـ u والثانية بـ a فنجد

$aux + buy = cu$
$aux + avy = aw$ } بالجمع

$aux + buy + aux + avy = cu + aw$

$\Rightarrow buy + avy = cu + aw$

$\Rightarrow (bu+av)y = cu + aw \Rightarrow 1.y = cu + aw$
$\Rightarrow y = cu + aw$

تمرين :
لتكن A حلقة غير واحدية تبديلية حيث الجزء الضربي عنصراً لكل عنصر نظير نفسه. لنعرف الجداء $\hat{A} = A \times U$ حيث U الحلقة البوليانية $\{0,1\}$ ولنعرف على $\hat{A}$ العمليتين

$(x,\alpha) + (y,\beta) = (x+y, \alpha+\beta)$
$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$

نعتبر أن $\underset{\in U}{1} x = \underset{\in A}{x}$ $\underset{\in U}{0} x = \underset{\in A}{x}$

برهن أن $\hat{A}$ حلقة بوليانية مع العمليتين المعرفتين
برهن أن التطبيق f من A في $\hat{A}$ المعرف كالتالي $f(x) = (x,0)$
هو مونومورفيزم حلقة

الحل:

واضح أن عملية الجمع في $\hat{A}$ هي تجميعية تبديلية وأن $\hat{A}$ تملك عنصر محايد $(0,0)$ علينا أن نكون لكل عنصر نظير

ومن تعريف نسبة

$$\forall (x,\alpha) \in \hat{A} \begin{cases} (x,0) \Rightarrow (x,0)+(x,0) = (x+x, 0+0) = (0,0) \\ (x,1) \Rightarrow (x,1)+(x,1) = (x+x, 1+1) = (0,0) \end{cases}$$

أي أن نظير كل عنصر نفسه وبالتالي فإن $(\hat{A},+)$ زمرة تبديلية

ب- عملية الضرب تجميعية لأن $\forall (x,\alpha),(y,\beta),(z,\gamma) \in \hat{A}$ فإن

$$(x,\alpha)((y,\beta)(z,\gamma)) = ((x,\alpha)(y,\beta))(z,\gamma)$$

- إن الضرب توزيعي مع الجمع وذلك لأن

$$\forall (x,\alpha),(y,\beta),(z,\gamma) \in \hat{A} ; \quad (x,\alpha)((y,\beta)+(z,\gamma)) = (x,\alpha)(y+z, \alpha+\beta)$$

$$= (x(y+z)+(\beta+\gamma)x+\alpha(y+z), \alpha(\beta+\gamma))$$

$$= (xy+xz+\beta x+\gamma x+\alpha y+\alpha z, \alpha\beta+\alpha\gamma)$$

$$(x,\alpha)(y,\beta)+(x,\alpha)(z,\gamma) = (xy+\beta x+\alpha y, \alpha\beta)+(xz+\gamma x+\alpha z, \alpha\gamma)$$

$$= (xy+\beta x+\alpha y+xz+\gamma x+\alpha z, \alpha\beta+\alpha\gamma)$$

أي أن الضرب توزيعي مع الجمع

ج- $(0,1)$ هو عنصر محايد بالنسبة للضرب في $\hat{A}$ لأنه $\forall (x,\alpha) \in \hat{A}$ فيكون

$$(x,\alpha)(0,1) = (x\cdot 0+1\cdot x+\alpha\cdot 0, \alpha\cdot 1) = (0+x+0, \alpha) = (x,\alpha)$$

وبالتالي $(\hat{A},+,\cdot)$ حلقة

أي أن الضرب في $\hat{A}$ جمعة وبالتالي في $\hat{A}$ حلقة بوليانية

$\forall x, y \in A ; f(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$

$f(x \cdot y) = (xy, 0) = (xy + 0.x + 0y, 0) = (x, 0)(y, 0)$
$= f(x) f(y)$

أي أن f مونومورفزم حلقة

تمرين:
نقول عن المجموعة الجزئية X من Z أنها n - دورية إذا كانت $X = X + n$ حيث
n عدد طبيعي والحيث $X + n = \{x + n , x \in X\}$ برهن أن المجموعة P_n
من المجموعات الجزئية n - دورية تشكل حلقة جزئية من $P(Z)$